続

実設計に応用できる演算回路スキルを身につけよう

デバイスの記事

外村元伸

第2回 キュービック・スプライン補間演算器の設計

連載第1回(本誌2006年7月号，pp.78-84)では，画像の拡大・縮小スケーリング表示に使われるリニア補間法やキュービック補間法などの演算を取り上げました．リニア補間法は拡大率を上げていくと画像がぼけてしまいます．そこで，補間精度を改善するためにキュービック補間法が用いられています．前回は，キュービック補間法の中でもおもにコンボリューション(convolution)法について説明しました．コンボリューション法は，完全に解けていない方程式の未定係数を経験値で補っているという不自然さがあることを指摘しました．今回は，もう一つのキュービック補間法であるスプライン(spline)法を説明します．(筆者)

前回説明したコンボリューション法に対して，スプライン法は数学的に(厳密に)定義されています．そのため，拡大率が大きくなるにつれてスプライン補間による表示のほうがコンボリューション補間よりも勝ってきます注1(**写真1**)．

スプライン法に関する書籍は数学書としての傾向が強く，今のところ画像の拡大に応用するための適当な解説書が見当たりません注2(p.122のコラム「B-スプラインのさまざまな表現形態」を参照)．演算器の構成にまで立ち入ったものは皆無と思われます．そこで，ここではあくまでも画像の拡大スケーリングにスプライン法を応用することを目的として説明を進めます．また，具体的な演算器の構成についても言及します．あいかわらず数式の多い説明になっていますが，スプライン法の画像の拡大表示への応用について，具体的に式を示したものはほかにはないと思います．

注1：自然画像は人工画像と比べてシャープに撮影するのが難しい．しかし，ゾーンプレートと呼ばれる人工的に描画した画像を用いて各種補間法に基づく画像の拡大スケーリングを比較すると，スプライン法とコンボリューション法の違いがよくわかる(連載第1回を参照)．

注2：専門的なスプライン補間法については，参考文献(1)，(2)を参照．

1．キュービック・スプライン法の設計手法

連載第1回で説明したコンボリューション法は，3次曲線間の1次微係数までの一致をとるものでした．一方，スプライン法では2次微係数まで一致させ，方程式を完全に解きます．

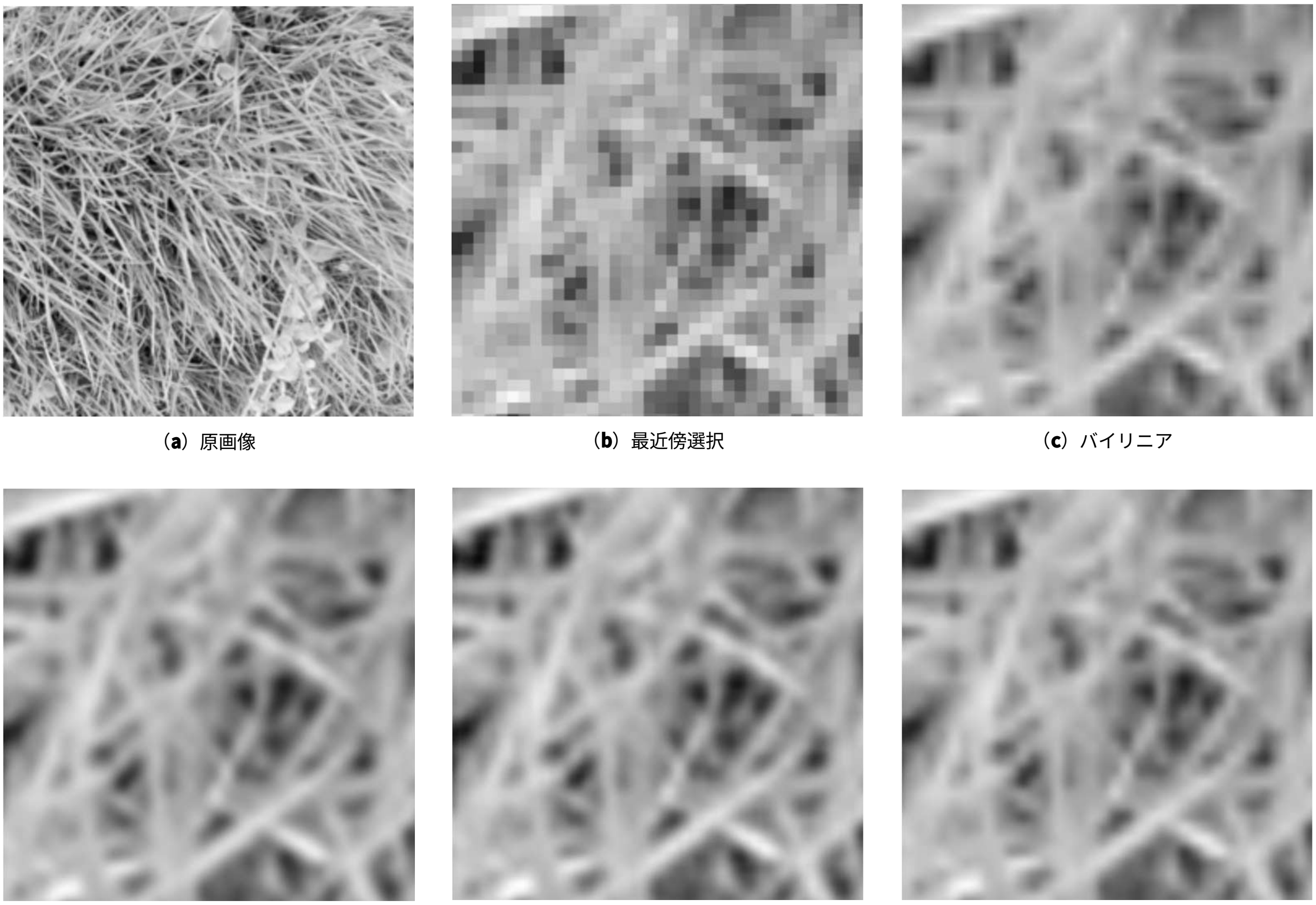
キュービック・スプライン法では正規化のため，$\varphi(0)=2/3$とします．8個の未定係数を解くための連立方程式は，

$$\begin{cases} 2/3=\varphi(0)=d_1 \\ \varphi(1)=a_1+b_1+c_1+d_1=a_2+b_2+c_2+d_2 \\ 0=\varphi(2)=8a_2+4b_2+2c_2+d_2 \\ 0=\varphi'(0)=c_1 \\ \varphi'(1)=3a_1+2b_1+c_1=3a_2+2b_2+c_2 \\ 0=\varphi'(2)=12a_2+4b_2+c_2 \\ \varphi''(1)=6a_1+2b_1=6a_2+2b_2 \\ 0=\varphi''(2)=12a_2+2b_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

となり，完全に解けます．ここで，$\varphi(\pm 1)=0$ではないことに注意してください．

ここでは，キュービック・スプライン法の重み関数$\varphi(x)$を$\beta^3(x)\equiv\varphi(x)$と記述することにします．これは，$\varphi(x)$が3次式であることを示すため，そしてこの関数がB(basis)-スプライン関数と呼ばれているためです．β^3は次のように表せます．

KeyWord: リニア補間法，キュービック補間法，コンボリューション法，スプライン法，B-スプライン，鏡像，線形方程式，前進消去，後退代入，ガウス消去法，キャリ・セーブ



(a) 原画像　(b) 最近傍選択　(c) バイリニア

(d) バイキュービック・スプライン6点　(e) バイキュービック・スプライン4点　(f) バイキュービック・コンボリューション

写真1　各種補間法に基づく画像拡大スケーリング表示結果の比較

各辺の拡大率は7倍，面積拡大率は49倍

$$\beta^3(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}|x|^2\left(2-|x|\right), & 0\leqq|x|<1\\ \dfrac{1}{6}\left(2-|x|\right)^3, & 1\leqq|x|<2\\ 0, & 2\leqq|x|\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで，c_kを補間係数とし，画素位置$k=0$を基準とすると，補間区間$0\leqq x<1$の補間値$f(x)$を求めるキュービック・スプライン補間式は，次の式(3)によって求められます．

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=-1}^{2}c_k\beta^3(x-k)\\&=c_{-1}\beta^3(x+1)+c_0\beta^3(x)\\&\quad+c_1\beta^3(x-1)+c_2\beta^3(x-2)\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式(2)から次式が得られます．

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1}{6}\Big(&\left(-c_{-1}+3c_0-3c_1+c_2\right)x^3\\&+\left(3c_{-1}-6c_0+3c_1\right)x^2\\&+\left(-3c_{-1}+3c_1\right)x+\left(c_{-1}+4c_0+c_1\right)\Big)\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで，画素位置kに対する画素値を$f_k=f(k)$とします．式(3)と式(4)は$k=0$を基準とするときの式ですが，画素位置$k=-1$，1，2を基準にする場合も同様にして，

$$f_k=\frac{1}{6}\left(c_{k-1}+4c_k+c_{k+1}\right)\quad(k=-1,\ 0,\ 1,\ 2)\quad\cdots\cdots(5)$$

となります．ただし，4個の補間係数c_{-1}，c_0，c_1，c_2の外にあるc_{-2}とc_3は，$c_{-2}=c_0$，$c_3=c_1$のように境界条件をつけて，鏡像であると考えます．一部の文献などでは，$c_{-2}=c_3=0$として境界条件を無視していますが，画質的には鏡像と考えるほうがよいようです．これにより，

$$\begin{bmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_{-1} = (1/6)(4c_{-1} + 2c_0) \\ f_0 = (1/6)(c_{-1} + 4c_0 + c_1) \\ f_1 = (1/6)(c_0 + 4c_1 + c_2) \\ f_2 = (1/6)(2c_1 + 4c_2) \end{cases}$$

なる関係式が得られます．4個の画素値 f_{-1}，f_0，f_1，f_2 が与えられたとき，線形（行列）方程式の式(6)を解くことにより，次式のように補間係数 c_{-1}，c_0，c_1，c_2 を決定できます．

$$\begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 26 & -14 & 4 & -1 \\ -7 & 28 & -8 & 2 \\ 2 & -8 & 28 & -7 \\ -1 & 4 & -14 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{-1} = (1/15)(26f_{-1} - 14f_0 + 4f_1 - f_2) \\ c_0 = (1/15)(-7f_{-1} + 28f_0 - 8f_1 + 2f_2) \\ c_1 = (1/15)(2f_{-1} - 8f_0 + 28f_1 - 7f_2) \\ c_2 = (1/15)(-f_{-1} + 4f_0 - 14f_1 + 26f_2) \end{cases} \quad \cdots(7)$$

式(7)を式(4)に代入すれば，

COLUMN：スプライン法のさまざまな表現形態

本文では，キュービック・コンボリューション法の導出に近い考えで，キュービック・スプライン法（B-スプライン法）を導出しました．一般に，スプライン法はいろいろな流儀で扱われていて，定義のしかたはさまざまです．ここでは，スプライン法を数学的な定義から眺めてみましょう．まず，切断べき（truncated power）関数と呼ばれる式が導入されます．

$$(x-k)_+^3 \equiv \begin{cases} (x-k)^3 & x > k \\ 0 & x \leqq k \end{cases}$$

k より大きい x に対してのみ，$(x-k)$ のべき乗が定義されます（左辺の右下の添え字「+」はこの意味を示すための記号）．式の展開操作を類推しやすくするために，連載第1回の式(2)のキュービック・ラグランジェ補間式を次のように書き換えます．

$$f(x) = \sum_{k=-1}^{2} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f_k$$

$$\omega(x) \equiv (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\begin{aligned}\omega'(x) \equiv\ & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2) \\ & + (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2) + (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$

これとよく似た展開ですが，スプライン法の場合は $\omega(x)$ の代わりに，

$$\sigma(x) \equiv (x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\begin{aligned}\sigma'(x) \equiv\ & (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + (x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + (x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2) \\ & + (x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2) \\ & + (x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\end{aligned}$$

とします．そして，以下のように各 x_i に対する切断べき関数の重み付けによって定義します．

$$\beta^3(x-k) \equiv (x_2 - x_{-2}) \cdot \sum_{i=k-2}^{k+2} \frac{(x-x_i)_+^3}{\sigma'(x_i)}$$

ここでは扱いを簡単にするため，整数座標で等間隔に並んだサンプル点を対象にした補間に限定します．そうすると，

$$\sigma_k(x) \equiv (x-k+2)(x-k+1)(x-k)(x-k-1)(x-k-2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_k'(i) \equiv\ & (i-k+1)(i-k)(i-k-1)(i-k-2) \\ & + (i-k+2)(i-k)(i-k-1)(i-k-2) \\ & + (i-k+2)(i-k+1)(i-k-1)(i-k-2) \\ & + (i-k+2)(i-k+1)(i-k)(i-k-2) \\ & + (i-k+2)(i-k+1)(i-k)(i-k-1)\end{aligned}$$

となるため，

$$\beta^3(x-k) \equiv 4 \cdot \sum_{i=k-2}^{k+2} \frac{(x-i)_+^3}{\sigma_k'(i)}$$

と定義できます．すなわち，

$$\begin{aligned}\beta^3(x-k) = \frac{1}{6}\Big\{ & (x-k+2)_+^3 - 4(x-k+1)_+^3 + 6(x-k)_+^3 \\ & - 4(x-k-1)_+^3 + (x-k-2)_+^3 \Big\}\end{aligned}$$

補間区間 $0 \leqq x < 1$ の補間値 $f(x)$ を求めるスプライン補間式は，

$$f(x) = \sum_{k=-1}^{2} c_k \beta^3(x-k)$$

なので，

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{6}\Big\{ & c_{-1}\left[(x+3)^3 - 4(x+2)^3 + 6(x+1)^3 - 4x^3\right] \\ & + c_0\left[(x+2)^3 - 4(x+1)^3 + 6x^3\right] \\ & + c_1\left[(x+1)^3 - 4x^3\right] + c_2 x^3 \Big\} \\ = \frac{1}{6}\Big(& (-c_{-1} + 3c_0 - 3c_1 + c_2)x^3 + (3c_{-1} - 6c_0 + 3c_1)x^2 \\ & + (-3c_{-1} + 3c_1)x + (c_{-1} + 4c_0 + c_1)\Big)\end{aligned}$$

が導かれ，本文の式(4)と同じ結果が得られます．

$$f(x)=\frac{1}{5}\Big(\big(-3f_{-1}+7f_0-7f_1+3f_2\big)x^3 +\big(7f_{-1}-13f_0+8f_1-2f_2\big)x^2 +\big(-4f_{-1}+f_0+4f_1-f_2\big)x\Big)+f_0 \quad \cdots\cdots(8)$$

となり，四つの画素位置の画素値 f_{-1}，f_0，f_1，f_2 を用いた補間式が得られます．ここで，補間区間（$0 \leqq x < 1$）は f_0 と f_1 の画素位置の間にあることに注意してください．

● 参照する画素数を拡張する

コンボリューション法とスプライン法の違いは，補間係数の定義にあります．コンボリューション法では補間係数 $c_k = f_k$ であるのに対して，スプライン法ではかならずしも補間係数 $c_k = f_k$ である必要はありません．c_k は，線形方程式を解いて求めることになります．さらに，参照画素数の個数を4個に限定する必要もなく，任意に選ぶことができます．

そこで次に，六つの画素位置の画素値 f_{-2}，f_{-1}，f_0，f_1，f_2，f_3 を用いたキュービック・スプライン補間式を導いて，任意個の場合への拡張性について考察してみます．

補間区間（$0 \leqq x < 1$）は f_0 と f_1 の画素位置の間にあるとします．まず，次の式(9)を考えます．

$$\begin{bmatrix} f_{-2}\\ f_{-1}\\ f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4&2&0&0&0&0\\ 1&4&1&0&0&0\\ 0&1&4&1&0&0\\ 0&0&1&4&1&0\\ 0&0&0&1&4&1\\ 0&0&0&0&2&4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_{-2}\\ c_{-1}\\ c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(9)$$

線形方程式である式(9)は，一般にガウスの消去法によって解けます．すなわち，上側の補間係数 c_{-2} から順番に消去していって（これを「前進消去」という），最後に下側の c_3 のみになる式を得ます．そこで今度は，下側の c_3 から上へさかのぼって代入していくことによって（これを「後退代入」という），すべての補間係数 c_k の式が確定していきます．

本稿で利用するおもなハードウェア構成は，上述したスプライン法の四つの画素位置の参照画素値をベースとするものです．ただし，$2n$ 個（$n > 2$）以上の画素位置への拡張性を考慮して，次のような解法を筆者は新しく考案しました．ガウスの消去法とは異なり，上側の補間係数 c_{-2} からと，下側の c_3 から同時に消去しながら式(9)を解いていきます．そうすると，途中で式(10)のようなかたちになります．

$$\begin{bmatrix} g_{-1}\\ f_0\\ f_1\\ g_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} w&1&0&0\\ 1&4&1&0\\ 0&1&4&1\\ 0&0&1&w \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_{-1}\\ c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，g_{-1}，g_2，w は補間係数 c_{-2} と c_3 を消去することによって現れ，具体的には式(11)のようになります．

$$\begin{cases} g_{-1} = -\dfrac{1}{4}f_{-2} + f_{-1} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{14}{4}c_{-1} + c_0\right)\\ g_2 = -\dfrac{1}{4}f_{-3} + f_2 = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{14}{4}c_2 + c_1\right)\\ w = \dfrac{7}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots(11)$$

今かりに，w のままにして式(10)を解くことにすれば，式(12)が得られます．

$$\begin{bmatrix} c_{-1}\\ c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{6}{(5w-1)(3w-1)}\times \begin{bmatrix} 15w-4 & 1-4w & w & -1\\ 1-4w & -w(1-4w) & -w^2 & w\\ w & -w^2 & -w(1-4w) & 1-4w\\ -1 & w & 1-4w & 15w-4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} g_{-1}\\ f_0\\ f_1\\ g_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(12)$$

そして，これらを式(4)に代入することにより，

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{1}{(3w-1)}\left\{-6g_{-1}+(3w+1)\left(f_0-f_1\right)+6g_2\right\}x^3\\ & +\frac{3\left\{6(4w-1)g_{-1}-\left(9w^2+2w-1\right)f_0+6w^2f_1-6wg_2\right\}}{(5w-1)(3w-1)}x^2\\ & +\frac{3\left\{-2(7w-2)g_{-1}-\left(w^2-4w+1\right)f_0+2w(2w-1)f_1-2(2w-1)g_2\right\}}{(5w-1)(3w-1)}x\\ & +f_0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(13)$$

となります．

以上，参照画素数を4個から6個へ拡張する考えかたを示しました．**図1**は任意の参照画素数 $2n$ 個（$n \geqq 3$）以上への拡張を概観したものです．キュービック・スプライン法

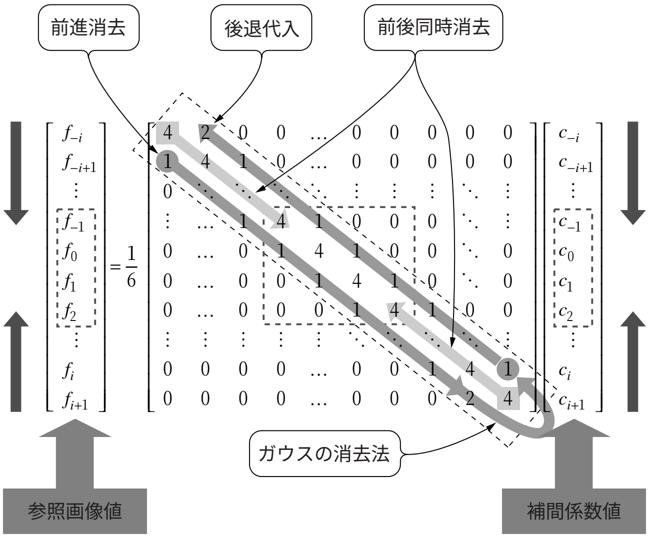


図1　ガウス消去法によるキュービック・スプライン補間の方程式解法と前後同時消去による解法

対象とする行列は，帯幅が3の対角帯行列である．普通は，教科書どおりガウスの消去法によって解くことで，補間係数値c_iが求まる．ここでは，必要な中心の4×4行列に簡単に還元できるように，前後から同時に消去することにした

による補間の方程式表現とそのガウス消去法，および前後同時方向からの消去による新しい解法を示しています．前後同時消去法によってg_{-1}とg_2の表現式を導き，wの具体値を求めればよいわけです．後は式(13)に代入することで補間式が得られます．なお，ガウス消去法によって解いても同じ結果になりますが，式(13)の解法によってnが3よりも大きい一般形式も容易に想像がつき，ハードウェア化を意識した場合にその方式がイメージしやすくなります．ここまでのヒントをもとに，一般化への具体的な拡張についてはみなさんで自由に考えてみてください．

2．線形補間演算器からの展開

さて，3次補間多項式 の形をした演算が必要なことがわかりましたが，乗算回数を削減するため，まずオーナー法と呼ばれている式変形を行います．この3次補間多項式をさらに線形補間ベースの形式になるように書き換えます．

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{【3次補間多項式】} \\ &= \big((Ax+B)x+C\big)x+D \\ &= \Big[\big\{ax+b(1-x)\big\}x+c(1-x)\Big]x+d(1-x) \\ &= \Big[\big\{(a-b)x+(b-c)\big\}x+(c-d)\Big]x+d \\ &= (a-b)x^3+(b-c)x^2+(c-d)x+d \end{aligned} \quad \cdots\cdots(14)$$

そうすると，$f_1 = f(1) = (a-b)+(b-c)+(c-d)+d = a$より，式(8)，式(13)のいずれの場合も係数$a$が画素値$f_1$に等しくなります．また，式(14)から$d = f_0$であることは明らかです．

連載第1回で説明したコンボリューション法についても同じように考えることができます．そのことを確かめてみましょう．コンボリューション法の式は以下のとおりです．

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{1}{2}\left(3f_0 - 3f_1 - f_{-1} + f_2\right)x^3 \\ &+\frac{1}{2}\left(-5f_0 + 4f_1 + 2f_{-1} - f_2\right)x^2 \\ &+\frac{1}{2}\left(f_1 - f_{-1}\right)x + f_0 \end{aligned}$$

式(14)から，次式が得られます．

$$\left\{\begin{aligned} c &= C + d \\ &= \frac{1}{2}\left(f_1 - f_{-1}\right) + f_0 = \frac{1}{2}\left(2f_0 + f_1 - f_{-1}\right) \\ b &= B + c \\ &= \frac{1}{2}\left(-5f_0 + 4f_1 + 2f_{-1} - f_2\right) + \frac{1}{2}\left(2f_0 + f_1 - f_{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-3f_0 + 5f_1 + f_{-1} - f_2\right) \\ a &= A + b \\ &= \frac{1}{2}\left(3f_0 - 3f_1 - f_{-1} + f_2\right) + \frac{1}{2}\left(-3f_0 + 5f_1 + f_{-1} - f_2\right) \\ &= f_1 \end{aligned}\right.$$

……………(15)

四つの画素位置を参照するスプライン法(式(8))は，

$$\left\{\begin{aligned} c &= \frac{1}{5}\left(-4f_{-1} + f_0 + 4f_1 - f_2\right) + f_0 \\ &= \frac{1}{5}\left(-4f_{-1} + 6f_0 + 4f_1 - f_2\right) \\ b &= \frac{1}{5}\left(7f_{-1} - 13f_0 + 8f_1 - 2f_2 - 4f_{-1} + 6f_0 + 4f_1 - f_2\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(3f_{-1} - 7f_0 + 12f_1 - 3f_2\right) \\ a &= \frac{1}{5}\left(-3f_{-1} + 7f_0 - 7f_1 + 3f_2 + 3f_{-1} - 7f_0 + 12f_1 - 3f_2\right) \\ &= f_1 \end{aligned}\right.$$

…………(16)

同様に，$2n$個($n \geqq 3$)の画素位置を参照するスプライン法(式(13))の場合は，

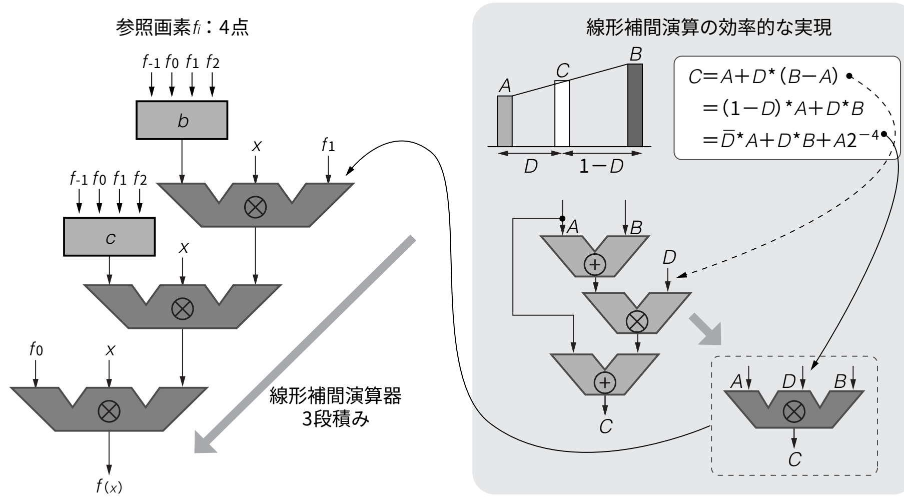


図2
3段積み線形補間演算器を利用した4点参照補間の演算ブロック図

線形補間演算器の1段目では，参照画素値f_1と参照画素4点f_{-1}，f_0，f_1，f_2から演算する係数bを入力とする．2段目では，1段目の出力と参照画素4点f_{-1}，f_0，f_1，f_2から演算する係数cを入力とする．3段目では，2段目の出力と参照画素値f_0を入力して線形補間演算し，最終出力とする

$$\begin{cases} c=\dfrac{2}{(3w-1)(5w-1)}\Big(-3(7w-2)g_{-1}+\big(6w^2+2w-1\big)f_0 \\ \qquad\qquad +3w(2w-1)f_1-3(2w-1)g_2\Big) \\ b=\dfrac{1}{3w-1}\big(6g_{-1}-(3w+1)f_0+6wf_1-6g_2\big) \\ a=f_1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

となります．

式(15)の係数bとcは積和演算形式ですが，よく見ると2の倍数で表現され，シフト演算で実現できるので，実際にはまじめに乗算する必要がありません．3倍は1倍と2倍に，5倍は1倍と4倍などに分ければよいのです．

では，1/5という係数を持つ式(16)はどうでしょうか．1/5は，$1/5=0.2=[0.00110011001100110011001100\cdots]\mathrm{b}=[0.\dot{0}\dot{0}\dot{1}\dot{1}]\mathrm{b}$，つまり循環2進小数となります．1/5の整数倍は例えば，

$$\begin{cases} 1/5 =[0.\dot{0}\dot{0}\dot{1}\dot{1}]\mathrm{b} \\ 2/5 =[0.\dot{0}\dot{1}\dot{1}\dot{0}]\mathrm{b} \\ 3/5 =[0.\dot{1}\dot{0}\dot{0}\dot{1}]\mathrm{b} \\ 6/5 =[1.\dot{0}\dot{0}\dot{1}\dot{1}]\mathrm{b} \\ 7/5 =[1.\dot{0}\dot{1}\dot{1}\dot{0}]\mathrm{b} \\ 12/5=[10.\dot{0}\dot{1}\dot{1}\dot{0}]\mathrm{b} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

などが挙げられます．

2のべき乗のように，シフト演算に似た性質を持っています．この性質を利用すれば，1/5とその整数倍についてはシフト演算で実現できます．具体的にどうすればよいかは，みなさんで考えてみてください(解答例は次回に示す)．

参照画素数が$2n$個($n>3$)の場合，式(17)の係数bとcはシフト演算では求められない一般形式なので，積和演算形式によって実現すればよいでしょう．

以上説明してきたことから，**図2**に示すような演算ブロック図のイメージができ上がります．**図2**の演算ブロックは，線形補間演算器をベースにしています(p.126のコラム「キャリ・セーブ形式を有効活用するための知識」を参照)．両端点の値AとBが与えられたときにその間の値CをD対$1-D$の割合で線形補間する場合の演算器(詳細は，2006年5月号，pp.39-48を参照)を3段積みにして，キュービック補間演算を実現します．係数bとcの値を演算するブロックを設けて線形補間演算器に入力します．

参考・引用*文献

(1) Thévenaz, P.；Interpolation Revisited, IEEE Trans. Medical Imaging, Vol. 19, No. 7, pp. 739-758, July 2000.
(2) de Boor, Carl；A Practical Guide to Spline(Revised Edition), Springer, 2001.

とのむら・もとのぶ
大日本印刷(株) 電子デバイス事業部 電子デバイス研究所

<著者プロフィール>
外村元伸．北九州でしばらくしごとをすることになり，小倉で暮らすようになりました．近くには小倉城があり，毎日のように眺めています．故郷の滋賀で通学していた高校は彦根城下にあり，城には縁が深い私です．

COLUMN：キャリ・セーブ形式を有効活用するための知識

本連載（および2006年5月号，pp.39-48，「特集1 第2章 LSIの中の基本部品を原理から理解する」）で説明してきた線形補間演算器の入出力データの表現形式は，符号なし数と符号付き数でした．

これら以外にも，出力のためにけた上げ伝播処理を完結しないで，けた上げを保存した状態で次段の演算へ出力を渡す「キャリ・セーブ」と呼ばれる表現形式があります．前回までに説明した3-2カウンタや4-2コンプレッサなどは，けた上げ（キャリ）とけたの和（サム）を出力しているので，実はキャリ・セーブ形式です．キャリ・セーブ形式では，jけたについて，キャリとサムの成分の対（c, j，s, j）で，A入力（$a_{c,j}$, $a_{s,j}$）とB入力（$b_{c,j}$, $b_{s,j}$）を表すと，線形補間の入力データの数表現記述は以下のようになります．

$$A=\left(-a_{s,\,n-1}2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}a_{s,\,j}2^{j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}a_{c,\,j}2^{j}\right)$$

$$B=\left(-b_{s,\,n-1}2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}b_{s,\,j}2^{j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}b_{c,\,j}2^{j}\right)$$

$$D=0.d_{n-1}\cdots d_1d_0=\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}$$

ここで，負の項は最上位（$n-1$）けたの和のみであり，それより上位けたへのけた上げ成分は存在しないようにした構成であること（本誌2006年5月号，p.48を参照），けた上げの最下位0けたの成分は存在しないこと，補間の割合入力Dはキャリ・セーブ形式ではないことなどに注意してください．このような数表現記述から，キャリ・セーブ形式では符号付き部（サム部分）と符号なし部（キャリ部分）に分けて考えると，これまで説明してきたやりかたに還元でき，容易に扱えます．詳しくは**図A-1**の式を見てください．また，$n=4$の場合は，**図A-2**に示すように構成できます．

線形補間演算器ではなく，一般の演算器出力では最上位けたの負の項にもキャリが発生することがあるので，扱いに注意が必要です．逆に，線形補間演算器はそのようなやっかいさがないということが大きな特徴であるといえます．

$$C=(1-D)A+DB$$

$$=\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left\{\left(-a_{s,n-1}2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}a_{s,j}2^{j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}a_{c,j}2^{j}\right)\right\}+\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left\{\left(-b_{s,n-1}2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}b_{s,j}2^{j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}b_{c,j}2^{j}\right)\right\}$$

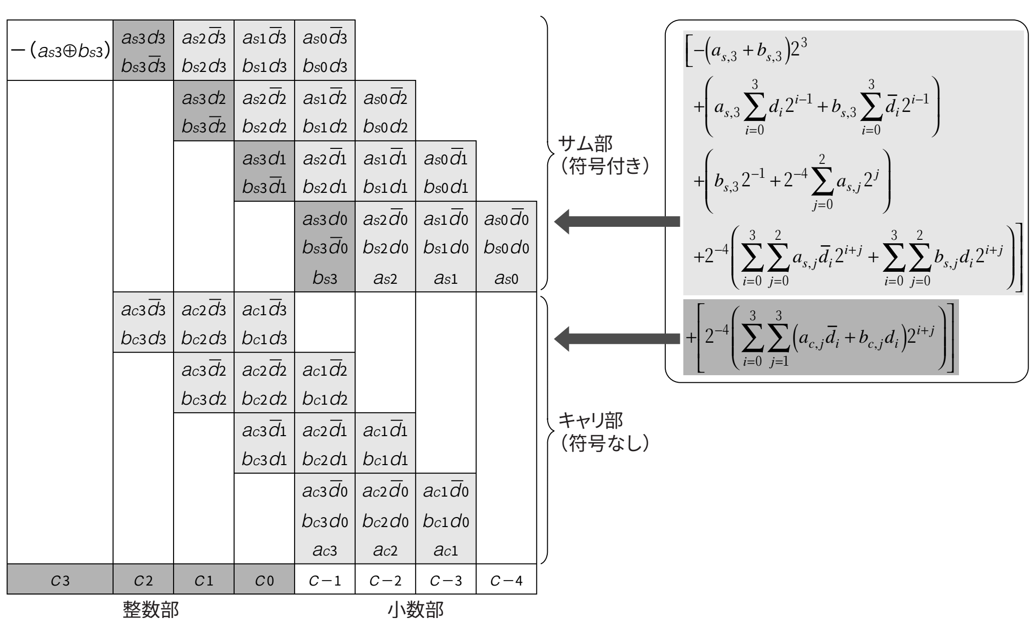
$$=\left[\left\{\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left(-a_{s,n-1}2^{n-1}\right)+\sum_{j=0}^{n-2}a_{s,j}2^{j}\right\}+\left\{\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left(-b_{s,n-1}2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}b_{s,j}2^{j}\right)\right\}\right]$$【サム部の項】

$$+\left[\left\{\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_{c,j}2^{i}\right)\right\}+\left\{\left(\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{-(n-i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}b_{c,i}2^{i}\right)\right\}\right]$$【キャリ部の項】

$$=\left[-\left(a_{s,n-1}+b_{s,n-1}\right)2^{n-1}+\left(a_{s,n-1}\sum_{i=0}^{n-1}d_i2^{i-1}+b_{s,n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{d}_i2^{i-1}\right)+\left\{b_{s,n-1}2^{-1}+2^{-n}\sum_{j=0}^{n-2}a_{s,j}2^{j}\right\}+2^{-n}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}a_{s,j}\bar{d}_i2^{i+j}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}b_{s,j}d_i2^{i+j}\right\}\right]$$【サム部の項，符号付き】

$$+2^{-n}\left[\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{c,j}\bar{d}_i+b_{c,j}d_i\right)2^{i+j}\right\}+\sum_{j=1}^{n-1}a_{c,j}2^{j}\right]$$【キャリ部の項，符号なし】

図A-1　キャリ・セーブ形式の式変換



図A-2
キャリ・セーブ形式の線形補間演算器の構成（4ビット）